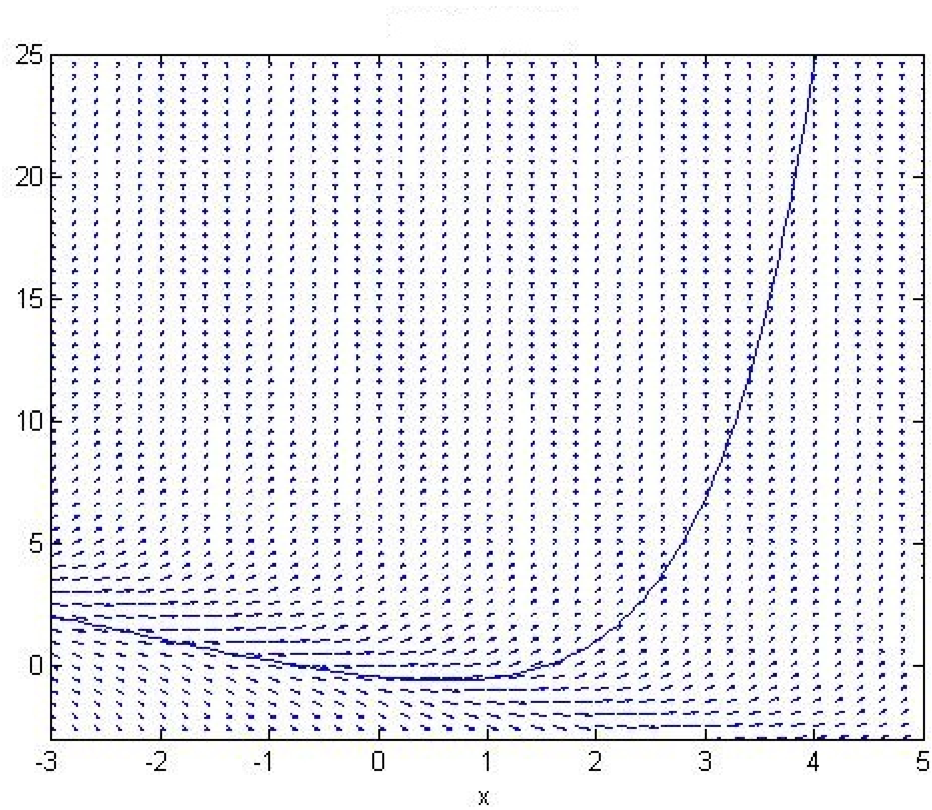
Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 2.1 Das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = x + y$ mit Lösungskurve durch den Punkt $(2, 1)$:



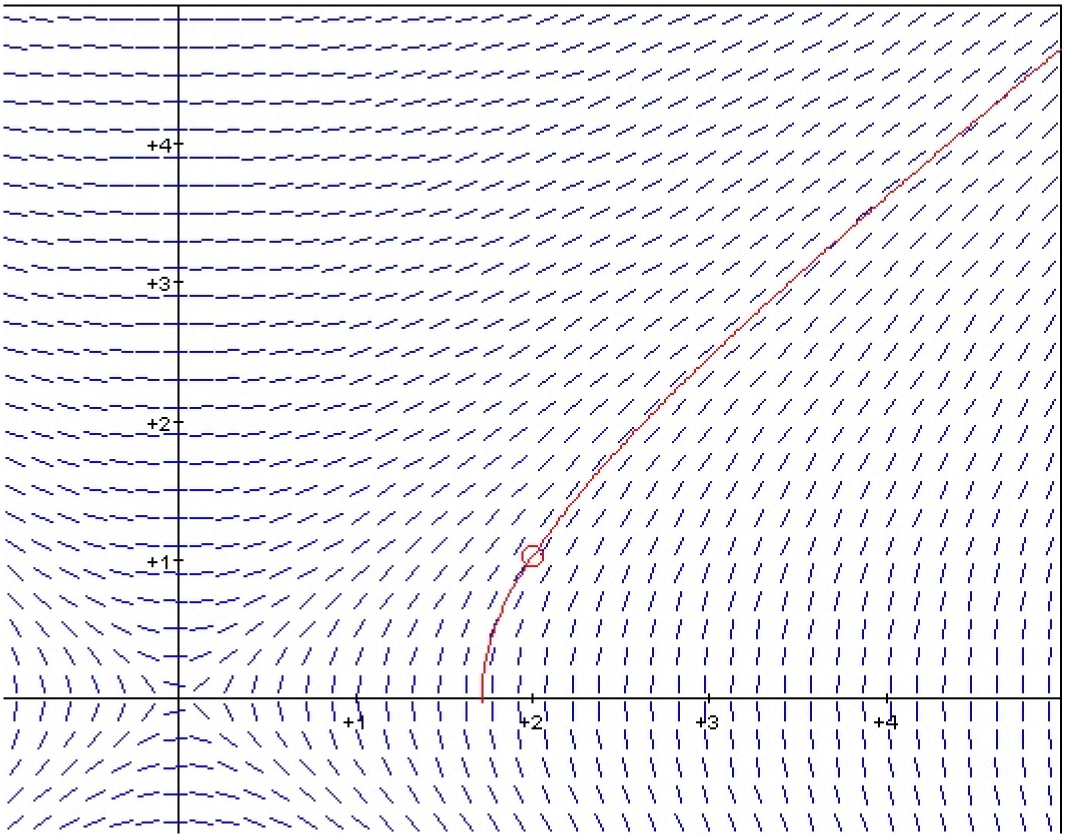
Mit Hilfe des Lösungsverfahrens "Variation der Konstanten" lässt sich folgende global eindeutige Lösung errechnen:

$$y(x) = 4 \exp(x - 2) - (x + 1)$$

Und somit ist der genaue Funktionswert an der Stelle 4

$$y(4) = 4 \exp(2) - 5.$$

Aufgabe 2.2 Das Richtungsfeld der Differentialgleichung $yy' = x$ mit Lösungskurve durch den Punkt $(2, 1)$:



Nun kann man einfach zeigen, dass $f(x) = y^2 + x^2$ eine Erhaltungsgröße, also unabhängig von x ist, denn es gilt:

$$y'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2y \cdot y' - 2x = 2x - 2x = 0.$$

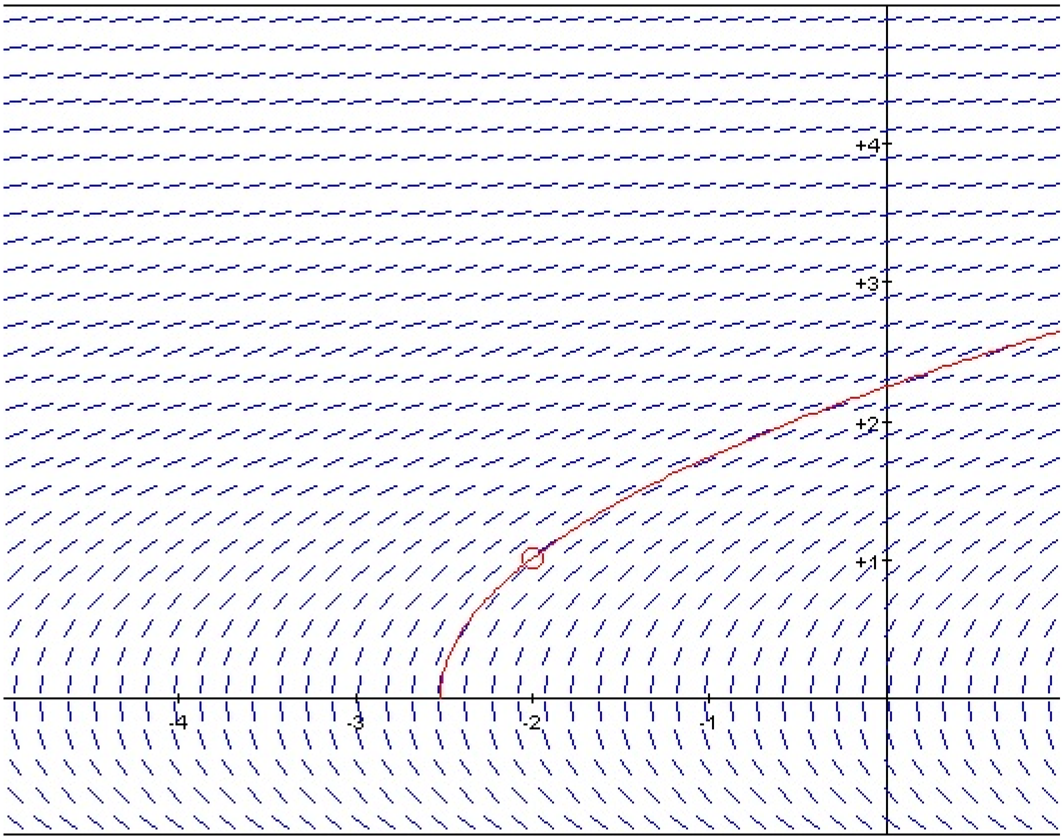
Aus dieser Beziehung, oder alternativ "Trennung der Variablen", erhält man die *lokal eindeutige* Lösung mit Anfangswert (2,1)

$$y(x) = \sqrt{x^2 - 3}.$$

Und somit ist der genaue Funktionswert an der Stelle 4

$$y(4) = \sqrt{4^2 - 3} = \sqrt{13}.$$

Aufgabe 2.3 Das Richtungsfeld der Differentialgleichung $yy' = 1$ mit Lösungskurve durch den Punkt $(-2, 1)$:



Mit Hilfe des Lösungsverfahrens "Trennung der Variablen"lässt sich folgende *lokal eindeutige* Lösung errechnen:

$$y(x) = \sqrt{2x + 5}.$$

Und somit ist der genaue Funktionswert an der Stelle 0

$$y(0) = \sqrt{5}.$$

Behauptung: Sei y eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $yy' = 1$ und es existiert ein x_0 mit $y(x_0) > 0$, so sind alle Funtionswerte von y positiv.

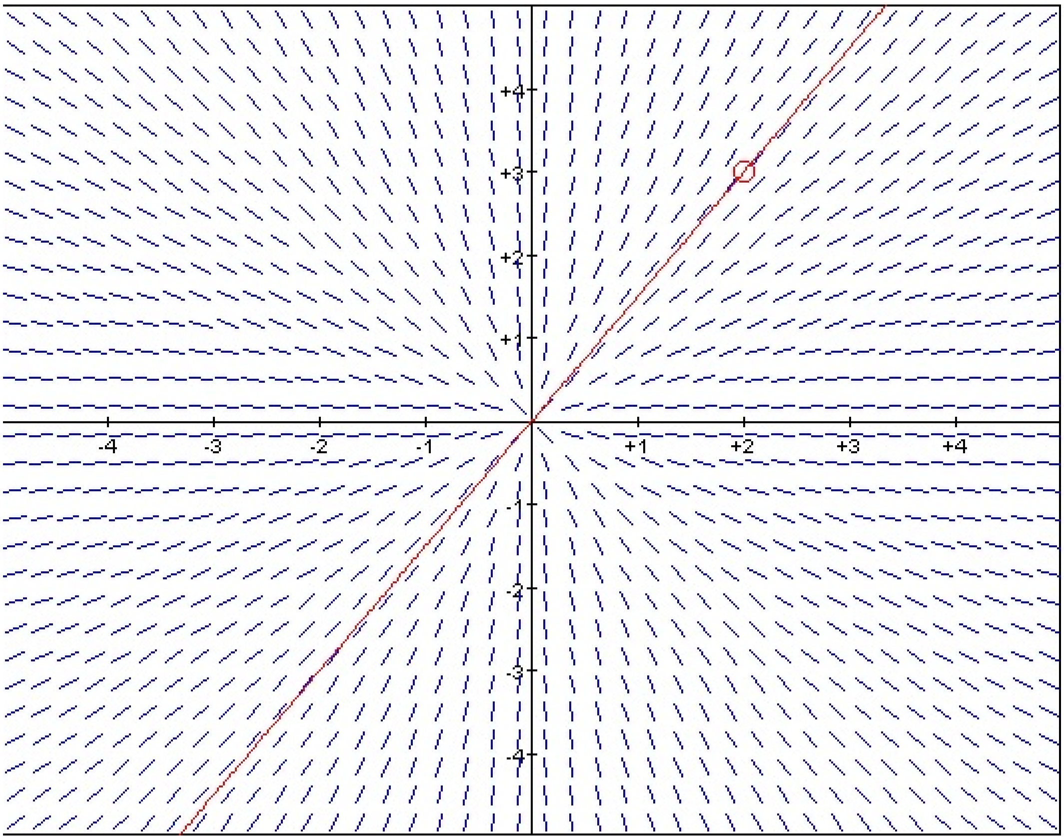
Beweis. Als erstes stellt man fest, dass keine Lösung die x-Achse schneidet, denn angenommen es existiert ein Wert x mit $y(x) = 0$, so folgt aus der Differentialgleichung $1 = y(x)y'(x) = 0 \cdot y'(x) = 0$.
Da y eine Lösung ist, welche an mindestens einer Stelle positiv ist, folgt die Behauptung direkt aus dem Zwischenwertsatz. $\square$

Aufgabe 2.4 Betrachte die Differentialgleichung $xy' = y$.

Für x=0 gilt $y = xy' = 0y' = 0$, d.h. jede Lösung verläuft den Ursprung (0,0).

Für x≠0 gilt die explizite Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$.

Das Richtungsfeld mit Lösungskurve durch den Punkt $(2, 3)$



Mit Hilfe des Lösungsverfahrens "Trennung der Variablen"lässt sich folgende *lokal eindeutige* Lösung errechnen:

$$y(x) = \frac{3}{2}x.$$

Nun ist die Eindeutigkeit dieser Lösung nachzuweisen.
Wir wissen, dass alle Lösungen lokal Geraden der Form $y = \frac{y_0}{x_0}x$ sind, wobei (x_0, y_0) der Anfangswert ist. Geraden lassen sich durch Geraden nur durch sich selbst glatt fortsetzen, also gilt die Eindeutigkeit.

Alternativ lässt sich die Eindeutigkeit auch auf den Intervallen (ϵ, ∞) und $(-\epsilon, -\infty)$ für $\epsilon > 0$ mit Hilfe des Picard-Lindelöf nachweisen.
Da außerhalb des Ursprungs die partiellen Ableitungen von $f(x, y) = \frac{y}{x}$ existieren und stetig sind, folgt nach der Vorlesung vom 5.11, dass f außerhalb des Ursprungs lokal Lipschitz Stetig ist. In $(0, 0)$ ist f nicht lokal Lipschitz Stetig, da für jede Umgebung des Ursprungs gilt:

$$\frac{|\frac{y_1}{x} - \frac{y_2}{x}|}{|y_1 - y_2|} = |\frac{1}{x}| \to \infty \ , x \to 0$$

Nach Picard-Lindelöf gibt es also ein $\tau > 0$, sodass eine Lösung y_1 der Differentialgleichung in der Umgebung $(2 - \tau, 2 + \tau)$ eindeutig existiert.
Angenommen es existiert eine weitere Lösung y_2 auf (ϵ, ∞), die dem Anfangswert $(2, 1)$ genügt, so definiere

$$z := inf\{x \in (\epsilon, \infty)| \ y_1(x) \neq y_2(x)\}.$$

Es sei bemerkt, dass das Infimum existiert, da die Menge nicht leer ist und nach unten beschränkt ist.
Die beiden Lösung sind nach Definition stetig, so gilt

$$y_1(z) = y_2(z).$$

Nun gibt es nach Picard-Lindelöf eine offene Umgebung von z, sodass die Lösung auf dieser eindeutig ist. Dies widerspricht der Definition von z.

Eine weitere Möglichkeit die Eindeutigkeit auf (ϵ, ∞) zu zeigen ist eine Argumentation mit Hilfe des Satzes "Trennung der Variablen"für die DGL $y' = h(y) \cdot g(x)$. Dieser liefert die Eindeutigkeit auf dem gesamten Intervall, auf dem die Funktionswerte der Lösungen keine Nullstellen von h sind. Hier ist $h(y) = y$, also ist die Lösung $y(x) = \frac{3}{2}x$ auf (ϵ, ∞) eindeutig.